A global identifiability theorem for the Schrodinger equation in a magnetic field(Spectral and Scattering Theory and Its Related Topics)

中村, 玄

数理解析研究所講究録
905巻 1995年 68-74

A global identifiability theorem for the Schrödinger equation in a magnetic field

東京理科大　中村　玄 (Gen Nakamura)

§1. 序

初めにこの研究は、Sun氏とUhlmann氏との共同研究である事を断っておきたい。

$\mathbb{N} \ni n \geq 3$ とし、有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。考えるSchrödinger作用素 $H_{\vec{A},q}$ は、

$$H_{\vec{A},q} = \sum_{j=1}^{n} (-i\,\partial_{x_j} + A_j(x))^2 + q(x)$$

とする。ここで $\vec{A} = (A_1, \cdots\cdots, A_n) \in C^1(\overline{\Omega})$ は magnetic potential, $q \in L^\infty(\Omega)$ は electric potential である。なお各 A_j と q は実数値関数である事に注意。

まず次の順問題を考える。

順問題 (BP):

$$(\mathrm{BP}) \begin{cases} H_{\vec{A},q}\, u = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \end{cases}$$

以下常に次の仮定をおく。

仮定： $0 \notin \{\text{eigenvalue of (BP)}\}$

良く知られている様に次の事実がなりたつ。

事実：(BP)の解 $u \in H^1(\Omega)$ がただ一つ存在する。

そこで Dirichlet−Neumann (= D−N) map $\Lambda_{\vec{A},q} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ を次の様に定める。

定義： $\forall f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\Lambda_{\vec{A},q}(f) = \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial\Omega} + i(\vec{A}\cdot N)f$

但し N は $\partial\Omega$ の単位外法線ベクトル場である。

次に逆問題として $\Lambda_{\vec{A},q}$ により, $\vec{A}$, q が同定(= 決定)可能かどうかを考えてみる。この逆問題を考えるに当っては，次の $\Lambda_{\vec{A},q}$ についての gauge invariance に注意する必要がある。

事実(gauge invariance)： $g \in C_0^1(\Omega) \Rightarrow \Lambda_{\vec{A}+\nabla g, q} = \Lambda_{\vec{A},q}$

従って我々の逆問題の定式化は次の様になる。

逆問題： $\Lambda_{\vec{A},q}$ により $\mathrm{rot}\,\vec{A}$, q が同定可能か？

ここでは特に同定が一意であるかどうかに焦点をあてて考えて行く事にする。

注意： この問題の肯定的解決は，コンパクト台をもつ $\vec{A}$, q に対して固定されたエネルギーの下での逆散乱問題の一意性を示すのに役に立つ。

分っている結果： Sun 氏による次の結果 (Trans. AMS, 338, '93, pp. 953−969) がある。即ち

$$\vec{A} \in C_0^2(\overline{\Omega}), \quad \|\mathrm{rot}\,\vec{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1, \quad q \in L^\infty(\Omega)$$

$\Longrightarrow$ OK

我々の結果；次の定理Aと定理Bがなりたつ。

定理A　$\vec{A}_j,\ q_j \in C^\infty(\overline{\Omega})\ (j=1,2),\ \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$

$$\Longrightarrow \mathrm{rot}(\vec{A}_1) = \mathrm{rot}(\vec{A}_2),\ q_1 = q_2 \ \text{ in } \Omega$$

定理B　$\vec{A}_j \in C_0^\infty(\Omega),\ q_j \in L^\infty(\Omega)\ (j=1,2),\ \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$

$$\Longrightarrow \mathrm{rot}(\vec{A}_1) = \mathrm{rot}(\vec{A}_2),\ q_1 = q_2 \ \text{ in } \Omega$$

§2. 定理の証明の概略

初めに定理Aは定理Bより従う事を示す。次の定理Cを用いる。

定理C　$\vec{A}_j,\ q_j \in C^\infty(\overline{\Omega})\ (j=1,2),\ \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$

$$\Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \equiv (\mathbb{N} \cup \{0\})^n,\quad \partial_x^\alpha(\mathrm{rot}\,\vec{A}_1) = \partial_x^\alpha(\mathrm{rot}\,\vec{A}_2) \ \text{ on } \partial\Omega$$

証明は，Nakamura-Sun-Uhlmann (to appear in Math. Annalen) を参照されたい。

さて $\vec{A}_j,\ q_j \in C^\infty(\overline{\Omega})\ (j=1,2),\ \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q}$ とする。今 $\overline{\Omega}$ を含む原点中心，半径 $R>0$ の開球 B_R をとる。そして $q_j' \in L^\infty(B_R)$ を $q_j\ (j=1,2)$ のゼロ拡張とする。必要ならば gauge invariance を用いて $\vec{A}_j\ (j=1,2)$ の何れか一方を修正すれば，定理Cより，$\vec{A}_j' = \vec{A}_j$ in $\Omega\ (j=1,2)$，$\vec{A}_1' = \vec{A}_2'$ on $B_R \setminus \Omega$ をみたす $\vec{A}_j' \in C_0^\infty(B_R)\ (j=1,2)$ が存在する。更に必要ならば，$R>0$ を

適当に調節して，$\exists B_R$ に対して $\Lambda_{\vec{A}_j', q_j'}$ $(j=1,2)$ が定義出来る様にするものとする。このとき

$$\begin{cases} \vec{A}_j' = \vec{A}_j, \quad q_j' = q_j \quad \text{on } \Omega \ (j=1,2) \\ \vec{A}_1' = \vec{A}_2', \quad q_1' = q_2' = 0 \quad \text{on } B_R \setminus \Omega \\ \Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2} \end{cases}$$

より，容易に $\Lambda_{\vec{A}_1', q_1'} = \Lambda_{\vec{A}_2', q_2'}$ が示せる。従って $\Omega = B_R$ として $\vec{A}_j' \in C_0^\infty(B_R)$，$q_j' \in L^\infty(B_R)$ $(j=1,2)$ について定理 B を適用すると，定理 A の結論が従う。

次に定理 B の証明について説明する。Sun 氏の証明と比べて目新しい点は，$\|\mathrm{rot}\,\vec{A}_j\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1$ $(j=1,2)$ の条件が無くても後述の "complex geometric optic solutions" が構成出来る点にある。そこで以下では主に "complex geometric optic solutions" の構成の話を中心にして定理 B の証明を説明する。

まず定理 B の仮定の条件を仮定する。$\Lambda_{\vec{A}_1, q_1} = \Lambda_{\vec{A}_2, q_2}$ と Green の公式より，次の key identity を得る。

Key identity：
$$i\int_\Omega (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)\cdot(u_1 \nabla \overline{u_2} - \overline{u_2} \nabla u_1)\,dx + \int_\Omega (\vec{A}_1^{\,2} - \vec{A}_2^{\,2} + q_1 - q_2) \times$$
$$\times\ u_1 \overline{u_2}\,dx = 0$$

for $\forall u_j \in H^1(\Omega)$, $H_{\vec{A}_j, q_j} u_j = 0$ in Ω

この key identity 内の u_j $(j=1,2)$ としては，次に述べる complex geometric solutions u_j $(j=1,2)$ を取る。

Fourier 変数 $0 \neq k \in \mathbb{R}^n$ を任意に固定したとき，単位ベクトル $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^n$ を k, γ_1, γ_2 が互いに直交する様にとる。このとき $H_{\vec{A}_j, q_j} u_j = 0$ in Ω $(j=1,2)$ をみたす complex geometric solutions $u_j(x, \xi_j) = e^{\xi_j \cdot x + \phi_j(x, \hat{\xi}_j)}(1 + w_j(x, \xi_j)) \in H^1(\Omega)$ $(j=1,2)$ が存在する。ここで

$$(*) \begin{cases} \xi_1 = \frac{i}{2} k + \tilde{\xi}, \quad \overline{\xi_2} = \frac{i}{2} k - \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} = s\zeta + g(s,k)\gamma_1, \quad g(s,k) = O(s^{-1}) \quad (s \to \infty) \quad (\text{for each fixed } k) \\ \zeta = \gamma_1 + i\gamma_2 \end{cases}$$

$$\|w_j\|_{H^{1-\alpha}(\Omega)} \leq C|\xi_j|^{-\alpha} \quad (\alpha = 0, 1)$$

$$(**) \quad \phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \hat{\xi}_j \cdot \nabla\phi_j = -i\hat{\xi}_j \cdot \vec{A}_j, \quad \hat{\xi}_j = |\xi_j|^{-1}\xi_j$$

である。これの証明については後でコメントする事にして定理 B の証明に区切りをつける。complex geometric solutions u_j $(j=1,2)$ を代入した key identity について $s \to \infty$ とすると，

$$\int_\Omega e^{ik\cdot x + \phi_1 + \overline{\phi_2}} \zeta \cdot (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)\, dx = 0$$

これを (*), (**) を用いて変形すると，

$$i \int_{\partial\Omega} e^{ik\cdot x} (\zeta \cdot N) e^{\Phi}\, dS = 0, \quad \Phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$$

更に積分幾何学の論法を活用すると，

$$\gamma_1 \int_{\Omega} e^{i\zeta_0 \cdot x} (\vec{A_1} - \vec{A_2})\, dx = 0$$

が従う。これより直ちに $\mathrm{rot}(\vec{A_1}) = \mathrm{rot}(\vec{A_2})$ in Ω を得，gauge invariance より，$\Lambda_{\vec{A_2}, q_2} = \Lambda_{\vec{A_1}, q_2}$。仮定の $\Lambda_{\vec{A_1}, q_1} = \Lambda_{\vec{A_2}, q_2}$ と組み合わせて $\Lambda_{\vec{A_1}, q_1} = \Lambda_{\vec{A_1}, q_2}$。この段階では，$\vec{A_1} = \vec{A_2}$ と考えてよい。こう考えた時 $\lim_{s\to\infty} (\phi_1 + \Phi_2) = 0$ となる事に注意。再び key identity より，$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 \overline{u_2}\, dx = 0$。ここで $s \to \infty$ として上の注意を使うと，

$$\int_{\Omega} e^{i\zeta_0 \cdot x} (q_1 - q_2)\, dx = 0.$$

従って $q_1 = q_2$ in Ω.

最後に complex geometric solutions u_j $(j=1,2)$ の構成についてコメントする。以下 index j を省く。まず w についての方程式の形をみる。

w の方程式：(∗∗∗) $M_\xi w - g w = g$

ここで $M_\xi w = \{\Delta + 2\xi\cdot\nabla + 2(\nabla\phi + i\vec{A})\cdot\nabla\} w$,

$$g = \vec{A}^2 - i\nabla\cdot\vec{A} + q - 2i\vec{A}\cdot\nabla\phi - \nabla\phi\cdot\nabla\phi - \Delta\phi \in L^\infty(\Omega).$$

M_ξ の right inverse M_ξ^{-1} の存在等については次がなりたつ。

補題　$\exists R>0$; $|{}^\forall\xi| \geq R$, ${}^\exists M_\xi^{-1} : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$

$$\left.\begin{aligned} \|M_\xi^{-1}(f)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C|\xi|^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ \|M_\xi^{-1}(f)\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}\right\} \quad (f \in L^2(\Omega),\ |\xi| \geq R)$$

ここで C は ξ に無関係な定数である。

この補題の証明は，M_{ξ} と Δ_{ξ} との intertwining (= transmutation) operator を構成することにより示される。詳細は前出の Nakamura − Sun − Uhlmann 論文を見られたい。